

Développement par rapport à la 3-ième ligne :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} &= 0(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} + 3(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} \\ &\quad + 0(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= -3 \cdot (-6) = 18 \end{aligned}$$

Corollaire 3.5

Si une matrice A contient une ligne formée de zéros, alors son déterminant est nul : $\det(A) = 0$.

3.2 Propriétés fondamentales

Pour calculer le déterminant d'une matrice de taille 4×4 , il faut donc calculer quatre déterminants de matrices de taille 3×3 et pour chacun de ceux-ci, il faut calculer trois déterminants de matrices de taille 2×2 . Pour calculer le déterminant d'une matrice de taille 5×5 , il faut calculer $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ déterminants de taille 2×2 et ainsi de suite. Nous avons donc intérêt à trouver une méthode qui demande moins de calculs.

Nous allons voir maintenant une suite de théorèmes qui permettent d'optimiser les calculs de déterminants.

Théorème 3.6

Déterminant et opérations élémentaires

Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice agissent sur le déterminant de la manière suivante.

Soit A et C deux matrices carrées de taille $n \times n$.

Type 1 Si $A \stackrel{L_j \leftrightarrow L_k}{\sim} C$ alors $\det(C) = -\det(A)$.

Type 2 Si $A \stackrel{L_j \leftarrow \lambda L_j}{\sim} C$ (avec $\lambda \neq 0$) alors $\det(C) = \lambda \det(A)$ ou $\det(A) = \frac{1}{\lambda} \det(C)$.

Type 3 Si $A \stackrel{L_j \leftarrow L_j + \lambda L_k}{\sim} C$ alors $\det(C) = \det(A)$.

Vérification dans le cas $n = 2$:

Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Nous avons $\det(A) = ad - bc$ et

a) $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb - ad = -\det(A)$.

b) $\begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{vmatrix} = \lambda ad - \lambda bc = \lambda(ad - bc) = \lambda \det(A)$.

c) $\begin{vmatrix} a + \lambda c & b + \lambda d \\ c & d \end{vmatrix} = (a + \lambda c)d - (b + \lambda d)c = ad - bc = \det(A)$.

Exemple. Calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$.

Nous allons utiliser des opérations élémentaires pour simplifier le calcul.

$$\begin{array}{l}
\left| \begin{array}{ccc} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \underline{\underline{=}} \end{array} \quad - \left| \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{array} \right| \\
\\
\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \underline{\underline{=}} \end{array} \quad - \left| \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 3 & 5 & 7 \end{array} \right| \\
\\
\begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ \underline{\underline{=}} \end{array} \quad - \left| \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & -8 \end{array} \right| \\
\\
\begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ \underline{\underline{=}} \end{array} \quad - \left| \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right|
\end{array}$$

Comme la matrice finale possède une ligne de zéros, son déterminant est nul, d'après le théorème 3.4. Donc $\det(A) = 0$.

Corollaire 3.7

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A).$$

Démonstration. Appliquons, ligne après ligne, l'opération élémentaire de type 2. Le calcul nous

donne :

$$\begin{aligned}
 \det(\lambda A) &= \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} \\
 &= \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} \\
 &= \lambda^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} \\
 &= \dots \\
 &= \lambda^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
 &= \lambda^n \det(A)
 \end{aligned}$$

□

Corollaire 3.8*Effet global des opérations élémentaires*

Soit A une matrice carrée et soit C une matrice équivalente à A par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes.

Il existe $\alpha \neq 0$ tel que

$$\det(C) = \alpha \det(A),$$

où α est le produit des facteurs introduits par chaque opération élémentaire.

Démonstration. Chaque opération élémentaire modifie le déterminant comme indiqué dans le théorème 3.6. En les composant, les effets se multiplient : la constante globale α est le produit des facteurs associés à chaque étape. □

Théorème 3.9

$$\det(A^T) = \det(A)$$

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$ et A^T sa matrice transposée. Nous avons

$$\det(A^T) = \det(A).$$

Démonstration. Admis dans le cas général.

Vérification dans le cas $n = 2$:

Nous avons $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. □

Remarque importante 3.10

Grâce à ce théorème, on peut remplacer le mot « ligne » par le mot « colonne » dans tous les résultats concernant le calcul du déterminant. Par exemple :

- Si la matrice A possède une colonne formée de zéros alors $\det(A) = 0$.
- On peut faire un développement par rapport à la k -ème colonne :

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{1+k} a_{1k} \det(A_{1k}) + (-1)^{2+k} a_{2k} \det(A_{2k}) + \dots + (-1)^{n+k} a_{nk} \det(A_{nk}) \\ &= a_{1k} C_{1k} + a_{2k} C_{2k} + \dots + a_{nk} C_{nk}. \end{aligned}$$

- On peut faire des opérations élémentaires sur les colonnes pour introduire des zéros dans la matrice.

Théorème 3.11*Déterminant de matrice triangulaire*

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) alors :

$$\det(A) = a_{11} a_{22} a_{33} \cdots a_{nn}.$$

Démonstration. Supposons que A est une matrice triangulaire inférieure. Le calcul nous donne :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \dots = a_{11} a_{22} \cdots a_{n-2, n-2} \begin{vmatrix} a_{n-1, n-1} & 0 \\ a_{n, n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} a_{22} \cdots a_{n-1, n-1} a_{nn}. \end{aligned}$$

Le calcul est analogue dans le cas où A est une matrice triangulaire supérieure :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= (-1)^{n+n} a_{nn} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1, n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n-1, n-1} \end{vmatrix} \\ &= \dots = a_{nn} \cdots a_{22} a_{11} \end{aligned}$$

□

Exemple. Calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Donc $\det(A) = 1 \cdot 1 \cdot 5 = 5$

Théorème 3.12

Déterminant de matrice triangulaire par blocs

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice triangulaire par blocs (supérieure ou inférieure), telle que tous les blocs diagonaux sont carrés (tous les A_{ii} sont carrés) alors :

$$\det(A) = \det(A_{11}) \det(A_{22}) \cdots \det(A_{nn}).$$

Démonstration. Admis. □

Théorème 3.13

Soit A et B deux matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients dans \mathbb{R} . Alors

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

Démonstration. Admis dans le cas général.

Vérification dans le cas $n = 2$:

Soient $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$. Nous avons

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \begin{vmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{vmatrix} \\ &= (ae + bg)(cf + dh) - (af + bh)(ce + dg) \\ &= eh(ad - bc) - fg(ad - bc) \\ &= (ad - bc)(eh - fg) \\ &= (\det A)(\det B). \end{aligned}$$

□

Remarques 3.3.0.14. 1. Même si $AB \neq BA$ en général, nous avons toujours

$$\det(AB) = \det(BA).$$

2. Calculer le déterminant de la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Observons que la ligne L_4 contient plusieurs zéros. Simplifions d'abord la colonne C_3 pour créer plus de zéros.

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} & \xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 - 2C_4} & \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow{\text{dév. } L_4} & & (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2} & & \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - L_2} & & \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow{\text{dév. } C_1} & & (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow{\text{dév. } C_3} & & -(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \\ & = & & -(-2 \cdot (-5) - 2 \cdot 1) = -8 \end{aligned}$$

Donc $\det(B) = -8$.

3. Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Observons que la matrice est quasiment triangulaire. En agissant sur la colonne C_4 , on peut rapidement trouver son déterminant.

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \xrightarrow{C_4 \leftarrow C_4 - 3C_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -20 \end{vmatrix} \\
 & = \\
 & = 1 \cdot 7 \cdot 3 \cdot (-20) \\
 & = -420
 \end{aligned}$$

3.4 Inversibilité d'une matrice

Théorème 3.17

Déterminant des matrices inversibles

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. Alors nous avons l'équivalence

$$A \text{ est inversible} \iff \det(A) \neq 0$$

Démonstration. (\Rightarrow) Si A est inversible, alors il existe une matrice $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$AA^{-1} = I_n = A^{-1}A.$$

Comme $\det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1$, alors $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$, donc $\det(A) \neq 0$.

(\Leftarrow) Supposons que A n'est pas inversible, montrons que $\det(A) = 0$.

D'après le théorème de caractérisation des matrices inversibles 2.23, A ne possède pas n positions pivot et de ce fait, la matrice échelonnée réduite, R , associée à A contient au moins une ligne de zéros. En développant par rapport à cette ligne, on obtient que $\det(R) = 0$.

Or d'après le corollaire 3.8, il existe $\alpha \neq 0$ tel que

$$\det(R) = \alpha \det(A).$$

Donc $\det(A) = 0$. □

Remarque 3.3.0.18. Ce théorème est particulièrement utile pour déterminer si une matrice est inversible avant de commencer le calcul de la matrice inverse.

Corollaire 3.19

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Si la matrice A est inversible alors

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Exemples. 1. La matrice suivante est-elle inversible ?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Nous allons calculer son déterminant. La colonne C_3 contient quatre zéros. Développons directement par rapport à cette colonne.

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} & \stackrel{\text{dév. } C_3}{=} (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} \\
 & \stackrel{\text{dév. } L_3}{=} (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} \\
 & \stackrel{\text{dév. } L_2}{=} (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\
 & = 1 \times 3 - 1 \times 3 = 0
 \end{aligned}$$

Donc $\det(A) = 0$. A n'est pas inversible.

2. Déterminer les valeurs du paramètre $k \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la matrice

$$A(k) = \begin{bmatrix} k-1 & 0 & 1 \\ 0 & k-2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

est inversible.

La matrice $A(k)$ est inversible si et seulement si $\det(A(k)) \neq 0$. Développons selon la première ligne qui contient un zéro.

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} k-1 & 0 & 1 \\ 0 & k-2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} & \stackrel{\text{dév. } L_1}{=} (k-1) \cdot \begin{vmatrix} k-2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & k-2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\
 & = (k-1)(3(k-2) - (-2)) + (0 - 2(k-2)) \\
 & = (k-1)(3k-6+2) - 2k+4 \\
 & = (k-1)(3k-4) - 2k+4 \\
 & = 3k^2 - 4k - 3k + 4 - 2k + 4 \\
 & = 3k^2 - 9k + 8
 \end{aligned}$$

La matrice $A(k)$ est inversible si et seulement si $3k^2 - 9k + 8 \neq 0$.

Réolvons $3k^2 - 9k + 8 = 0$ avec $\Delta = 81 - 96 = -15 < 0$.

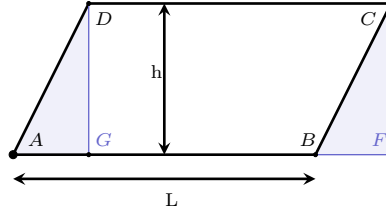
Comme le discriminant est négatif, l'équation n'a pas de racines réelles.

La matrice $A(k)$ est donc inversible pour tout $k \in \mathbb{R}$.

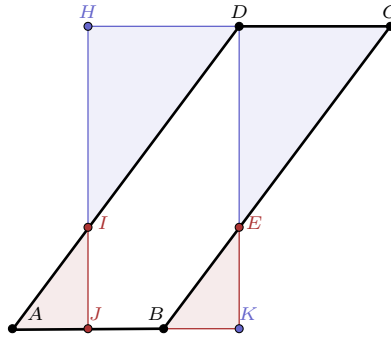
3.5 Interprétation géométrique du déterminant

3.5.1 Rappel : aire d'un parallélogramme

L'aire du parallélogramme $ABCD$ est $\mathcal{A}_{ABCD} = Lh$, où $L = AB = CD$ et h est la hauteur du parallélogramme issue de AB . C'est la même aire que le rectangle $GFCD$, obtenu en découpant le triangle AGC et en le recollant le long de BD .



Cette formule ne dépend pas du côté choisi comme base. En effet, sur la figure suivante, l'aire du parallélogramme $ABCD$ est aussi égale à l'aire du rectangle $JKDH$ obtenu en découpant le triangle CDE et en le recollant le long de DI , puis en découpant le triangle AIJ et en le recollant le long de BE .



3.5.2 Déterminant et parallélogramme

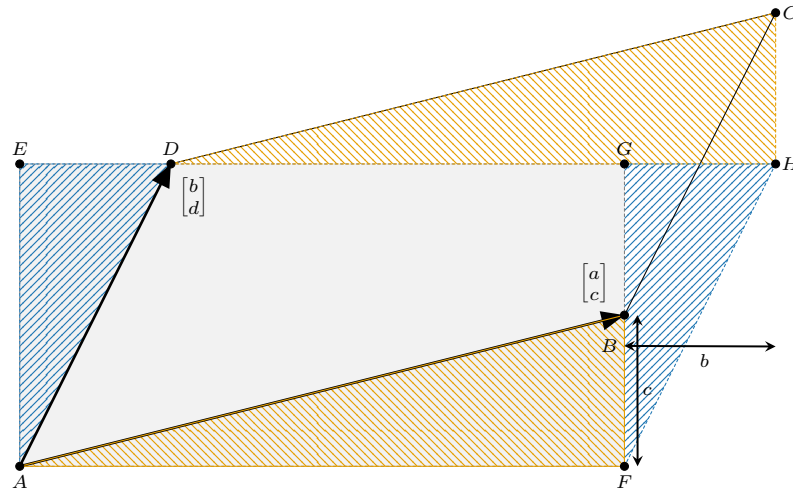
Théorème 3.20

Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ une matrice 2×2 . L'aire du parallélogramme défini par les vecteurs colonnes de A est égale à $|\det(A)|$ (valeur absolue du déterminant). Plus précisément :

$$\text{Aire} = \left| \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right| = |ad - bc|$$

Démonstration. Commençons par remarquer que si les vecteurs colonnes de A sont colinéaires, alors ils définissent un parallélogramme plat, et $\det(A) = 0$.

Si les colonnes de A ne sont pas colinéaires, la figure suivante montre que le parallélogramme défini par les vecteurs $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ a une aire de $ad - bc$, dans le cas où $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$ et $ad - bc > 0$.



Le rectangle gris a une aire de ad . Ce rectangle couvre partiellement le parallélogramme $ABCD$. Hors du parallélogramme $ABCD$, le rectangle gris couvre

- le triangle ABF hachuré en jaune, dont l'aire est égale à celle du triangle CHD aussi hachuré en jaune,
- et le triangle AED hachuré en bleu, dont l'aire est égale au triangle FGH aussi hachuré en bleu.

Donc finalement, l'aire ad comprend l'aire du parallélogramme $ABCD$ et celle du parallélogramme $BCHF$. Or l'aire de $BCHF$ est bc . Donc l'aire de $ABCD$ est $ad - bc$.

Si $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$ et $ad - bc < 0$, il suffit d'invertir les colonnes de $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et utiliser la propriété $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}$, pour se ramener au cas précédent.

Dans le cas où certains des coefficients a, b, c ou d sont négatifs, le même type de raisonnement fonctionne, avec un découpage adapté qui tient compte des signes. □

3.5.3 Déterminant et parallélépipède

Théorème 3.21

Soit $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ une matrice 3×3 . Le volume du parallélépipède défini par les vecteurs colonnes de A est égal à $|\det(A)|$.

Remarque 3.3.0.22. Ces interprétations géométriques expliquent pourquoi :

- Si $\det(A) = 0$, les vecteurs colonnes sont coplanaires (en dimension 3) ou colinéaires (en dimension 2), et le volume ou l'aire étant nul.
- En dimension n , le déterminant mesure le « volume n -dimensionnel » du paralléloétope défini par les colonnes de la matrice.

Chapitre 4 : Espaces vectoriels

Les espaces vectoriels constituent l'un des concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire. Ils généralisent les notions de vecteurs du plan et de l'espace que nous avons étudiées précédemment, et permettent d'unifier le traitement de nombreux objets mathématiques (vecteurs, matrices, polynômes, fonctions...) sous un même formalisme.

4.1 Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels

4.1.1 Espaces vectoriels et propriétés

Notation. Soit E et F deux ensembles. On note $E \times F$ le produit cartésien de E et F :

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E, y \in F\}.$$

Donc, si V est un ensemble, $V \times V$ est l'ensemble de tous les couples d'éléments de V et $\mathbb{R} \times V$ est l'ensemble des couples (λ, v) où λ est réel, et v est un élément de V .

Définition 4.1

Soit V un ensemble non vide sur lequel sont définies deux opérations appelées *addition* et *multiplication par un scalaire* :

$$\begin{array}{lcl} + : V \times V & \longrightarrow & V & \text{et} & \cdot : \mathbb{R} \times V & \longrightarrow & V \\ (u, v) & \longmapsto & u + v & & (\lambda, v) & \longmapsto & \lambda v \end{array}$$

On dit que V est un espace vectoriel si les dix axiomes suivants sont satisfaits :

1. La somme de u et v , notée $u + v$, est un élément de V .
2. L'addition est commutative : $u + v = v + u$, pour tout $u, v \in V$.
3. L'addition est associative : $(u + v) + w = u + (v + w)$, pour tout $u, v, w \in V$.
4. Il existe un élément $0_V \in V$, appelé *vecteur zéro*, tel que $v + 0_V = v$, pour tout $v \in V$.
5. Pour chaque $v \in V$ il existe un élément $-v \in V$ tel que $v + (-v) = 0_V$.
6. Le multiple scalaire de v par $\lambda \in \mathbb{R}$, noté λv , est un élément de V .
7. Si $u, v \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.
8. Si $v \in V$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$.
9. Si $v \in V$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$.
10. Si $v \in V$ alors $1v = v$.

Les éléments d'un espace vectoriel sont appelés vecteurs.

Remarques 4.4.0.2. 1. A l'aide de ces axiomes, nous pouvons montrer que le vecteur 0_V de l'axiome 4 est unique. En effet, supposons que w est un vecteur de V qui satisfait $v + w = v$ pour tout $v \in V$. Comme cette propriété est valable pour $v = 0_V$, nous avons $0_V + w = 0_V$.

L'axiome 2 nous donne alors $w + 0_V = 0_V$. Comme l'axiome 4 nous donne aussi $w + 0_V = w$, nous avons bien $w = 0_V$.

2. De manière analogue nous pouvons montrer que pour chaque choix de v , le vecteur $-v$ de l'axiome 5 est unique. Il est appelé opposé de v .
3. Un ensemble muni des opérations d'addition et de multiplication par un scalaire est un espace vectoriel si et seulement s'il vérifie tous les dix axiomes. Si un ensemble muni des opérations d'addition et de multiplication par un scalaire ne satisfait pas au moins un des axiomes, alors l'ensemble n'est pas un espace vectoriel (voir exemple 7 plus bas).

Exemples

1. Le plan \mathbb{R}^2 formé des vecteurs

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \text{avec } x, y \in \mathbb{R},$$

muni des opérations usuelles :

addition : si $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

multiplication par un scalaire : si $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\lambda \vec{v} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

est un espace vectoriel.

Vecteur zéro : $0_{\mathbb{R}^2} = \vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

2. L'ensemble \mathbb{R}^n des n -tuples

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \text{avec } x_j \in \mathbb{R} \text{ pour } j = 1, 2, \dots, n,$$

muni des opérations suivantes :

addition : si $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

multiplication par un scalaire : si $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\lambda \vec{x} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

est un espace vectoriel.

$$\text{Vecteur zéro : } 0_{\mathbb{R}^n} = \vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Notation. \mathbb{R}^n tel qu'étudié aux chapitres précédents est donc un espace vectoriel, et ses éléments sont donc des vecteurs au sens défini ci-dessus. Mais les exemples suivants montrent d'autres types d'espaces vectoriels. Nous garderons la notation avec une flèche, \vec{v} , lorsqu'il s'agira d'éléments de \mathbb{R}^n , mais nous noterons sans flèche, $v \in V$ pour V un espace vectoriel quelconque.

3. L'ensemble $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ des matrices de taille $m \times n$ à coefficients réels muni des opérations suivantes

addition : si $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, alors

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

multiplication par un scalaire : si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\lambda A = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

est un espace vectoriel.

$$\text{Vecteur zéro : } 0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})} = 0_{m \times n} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Remarque importante 4.3

On dit bien que l'ensemble des matrices muni de l'addition et de la multiplication scalaire, est un espace vectoriel. Donc ses éléments (les matrices) sont, dans ce contexte, des vecteurs. On voit donc là un premier exemple de cas où la notion de vecteur prend un sens plus abstrait, moins direct, que l'interprétation géométrique habituelle, avec des flèches issues de l'origine, dans un repère.

Les exemples suivants vont dans ce sens.

4. L'ensemble \mathbb{P}_n des polynômes de degré inférieur ou égal à n :

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

avec $a_j \in \mathbb{R}$ pour $j = 0, 1, 2, \dots, n$, muni des opérations suivantes :

addition : si $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ et $q(x) = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0$, alors

$$\begin{aligned} (p+q)(x) &= p(x) + q(x) = (a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0) + (b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0) \\ &= (a_n + b_n) x^n + \dots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0) \in \mathbb{P}_n. \end{aligned}$$

multiplication par un scalaire : si $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} (\lambda p)(x) &= \lambda p(x) = \lambda(a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0) \\ &= (\lambda a_n) x^n + \dots + (\lambda a_1) x + (\lambda a_0) \in \mathbb{P}_n. \end{aligned}$$

est un espace vectoriel.

Vecteur zéro : $p(x) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

5. L'ensemble $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions réelles d'une variable réelle muni des opérations suivantes

addition : si $f, g \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

multiplication par un scalaire : si $f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

est un espace vectoriel.

Vecteur zéro : $f(x) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

6. L'ensemble $V = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ des nombres réels positifs muni des opérations suivantes

addition : si $x, y \in V$, alors

$$x \oplus y = xy$$

multiplication par un scalaire : si $x \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\lambda \odot x = x^\lambda$$

est un espace vectoriel. Pour le voir, nous devons vérifier que V satisfait les dix axiomes :

(a) Si $x, y \in V$, alors $x > 0$, $y > 0$ et $x \oplus y = xy > 0$. Par conséquent, $x \oplus y \in V$.

(b) L'addition est commutative :

$$x \oplus y = xy = yx = y \oplus x, \quad \text{pour tout } x, y \in V.$$

(c) L'addition est associative :

$$(x \oplus y) \oplus z = (xy) \oplus z = (xy)z = x(yz) = x \oplus (yz) = x \oplus (y \oplus z), \quad \text{pour tout } x, y, z \in V.$$

(d) Le vecteur zéro est le nombre réel 1 car

$$x \oplus 1 = x \cdot 1 = x, \quad \text{pour tout } x \in V.$$

(e) L'opposé de x est $\frac{1}{x}$ car

$$x \oplus \frac{1}{x} = x \cdot \frac{1}{x} = 1, \quad \text{pour tout } x \in V.$$

(f) Si $x \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $x > 0$ et $\lambda \odot x = x^\lambda > 0$. Par conséquent, $\lambda \odot x \in V$.

(g) Si $x, y \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$\lambda \odot (x \oplus y) = \lambda \odot (xy) = (xy)^\lambda = x^\lambda y^\lambda = (x^\lambda) \oplus (y^\lambda) = (\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y).$$

(h) Si $x \in V$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors

$$(\lambda + \mu) \odot x = x^{\lambda + \mu} = x^\lambda x^\mu = (x^\lambda) \oplus (x^\mu) = (\lambda \odot x) \oplus (\mu \odot x).$$

(i) Si $x \in V$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors

$$(\lambda\mu) \odot x = x^{\lambda\mu} = (x^\mu)^\lambda = \lambda \odot (x^\mu) = \lambda \odot (\mu \odot x).$$

(j) Si $x \in V$ alors $1 \odot x = x^1 = x$, pour tout $x \in V$.

7. Le plan \mathbb{R}^2 muni des opérations suivantes :

addition : si $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

multiplication par un scalaire : si $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\lambda \vec{x} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

n'est pas un espace vectoriel. En effet, malgré le fait que les axiomes 1-9 sont satisfaits avec cette multiplication par un scalaire modifiée, l'axiome 10 ne l'est pas :

$$\text{si } \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ avec } x_2 \neq 0, \text{ alors } 1 \vec{x} = \begin{bmatrix} 1x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \vec{x}.$$

Remarque importante 4.4

Remarquons qu'un ensemble n'est pas en soi un espace vectoriel. Les opérations dont il est muni sont cruciales. Cela étant dit, quand on mentionnera l'espace vectoriel \mathbb{R}^n , dans le reste de ce cours, cela fera implicitement référence à celui de l'exemple 2.

Propriété 4.5

Simplification de l'addition

Soit V un espace vectoriel. Soit $u, v, w \in V$.

1. Si $u + w = v + w$ alors $u = v$ (simplification à droite).
2. Si $w + u = w + v$ alors $u = v$ (simplification à gauche).

Démonstration. 1. Nous avons

$$\begin{aligned} u + w &= v + w \\ \Rightarrow (u + w) + (-w) &= (v + w) + (-w) \\ \Rightarrow u + [w + (-w)] &= v + [w + (-w)] \quad \text{par (3)} \\ \Rightarrow u + \vec{0} &= v + \vec{0} \quad \text{par (5)} \\ \Rightarrow u &= v \quad \text{par (4)} \end{aligned}$$

2. Comme l'axiome (2) nous donne

$$w + u = u + w \quad \text{et} \quad w + v = v + w,$$

nous avons le résultat en utilisant la partie a). □

Propriété 4.6

Soit V un espace vectoriel. Si $v \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

1. $0 \cdot v = 0_V$
2. $\lambda \cdot 0_V = 0_V$
3. $(-1) \cdot v = -v$

Démonstration. 1. Nous avons

$$\begin{aligned} 0v + 0v &= (0 + 0)v \quad \text{par (8)} \\ \Rightarrow 0v + 0v &= 0v \\ \Rightarrow (0v + 0v) + (-0v) &= 0v + (-0v) \\ \Rightarrow 0v + (0v + (-0v)) &= 0v + (-0v) \quad \text{par (3)} \\ \Rightarrow 0v + 0_V &= 0_V \quad \text{par (5)} \\ \Rightarrow 0v &= 0_V \quad \text{par (4)} \end{aligned}$$

2. Nous avons

$$\begin{aligned} \lambda 0_V + \lambda 0_V &= \lambda(0_V + 0_V) \quad \text{par (7)} \\ \Rightarrow \lambda 0_V + \lambda 0_V &= \lambda 0_V \quad \text{par (4)} \\ \Rightarrow (\lambda 0_V + \lambda 0_V) + (-\lambda 0_V) &= \lambda 0_V + (-\lambda 0_V) \\ \Rightarrow \lambda 0_V + (\lambda 0_V + (-\lambda 0_V)) &= \lambda 0_V + (-\lambda 0_V) \quad \text{par (3)} \\ \Rightarrow \lambda 0_V + 0_V &= 0_V \quad \text{par (5)} \\ \Rightarrow \lambda 0_V &= 0_V \quad \text{par (4)} \end{aligned}$$

3. Nous devons montrer que $v + (-1)v = 0_V$ pour tout $v \in V$:

$$\begin{aligned} v + (-1)v &= 1v + (-1)v \quad \text{par (10)} \\ \Rightarrow v + (-1)v &= (1 + (-1))v \quad \text{par (8)} \\ \Rightarrow v + (-1)v &= 0v \\ \Rightarrow v + (-1)v &= 0_V \quad \text{par la partie a).} \end{aligned}$$

□

Remarques 4.4.0.7. Dans l'espace vectoriel de l'exemple 6,

- la propriété $0v = 0_V$ s'écrit $x^0 = 1$
- la propriété $\lambda 0_V = 0_V$ s'écrit $1^\lambda = 1$
- la propriété $(-1)v = -v$ s'écrit $x^{-1} = \frac{1}{x}$

Définition 4.8

Combinaison linéaire

Soit V un espace vectoriel. $v \in V$ est une *combinaison linéaire* des vecteurs v_1, v_2, \dots, v_n de V s'il peut s'écrire sous la forme

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n, \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}.$$

Les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont appelés *coefficients* (ou *ponds*) de la combinaison linéaire.

Exemples. 1. Soit $V = \mathbb{R}^3$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Comme

$$3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \vec{v},$$

le vecteur \vec{v} est combinaison linéaire de \vec{v}_1 et \vec{v}_2 avec coefficients respectifs $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = 2$.

2. Soit $V = \mathbb{P}_2$ et Soit $p_1(x) = 2x^2 + 3$, $p_2(x) = x^2 - x$. Comme

$$4p_1(x) + (-8)p_2(x) = 4(2x^2 + 3) + (-8)(x^2 - x) = 8x + 12,$$

le polynôme $p(x) = 8x + 12$ est combinaison linéaire de p_1 et p_2 avec coefficients respectifs $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = -8$.

4.1.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 4.9

Sous-espaces vectoriels

Soit V un espace vectoriel et soit $W \subset V$ un sous-ensemble de V .

On dit que W est un *sous-espace vectoriel* de V si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $0_V \in W$.
2. Si $w_1, w_2 \in W$ alors $w_1 + w_2 \in W$ (stabilité par addition).
3. Si $w \in W$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda w \in W$ (stabilité par multiplication scalaire).

En d'autres termes, $W \subset V$ est un sous-espace vectoriel de V s'il est non-vide et si toute combinaison linéaire d'éléments de W est un élément de W .

Remarque importante 4.10

Si W est un sous-espace vectoriel de V , alors W est un espace vectoriel muni des opérations induites par V (vérifier que les 10 axiomes sont satisfaits pour W).
Donc, pour montrer qu'un ensemble non-vidé est un espace vectoriel, il suffit de montrer qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu, ce qui est souvent plus rapide, puisqu'il n'y a que trois axiomes à vérifier.

Remarques 4.4.0.11. 1. On a l'inclusion $W \subset V$. Or si W est un espace vectoriel, W vérifie les dix axiomes de la définition 4.1, et par conséquent W vérifie aussi les trois axiomes de la définition 4.9. Donc W est un sous-espace vectoriel de V . C'est le plus grand sous-espace vectoriel de V .

2. $\{0_V\} \subset W$ est un sous-espace vectoriel de W . En effet, nous avons

- (a) $0_V \in \{0_V\}$,
- (b) $0_V + 0_V = 0_V \in \{0_V\}$,
- (c) $\lambda 0_V = 0_V \in \{0_V\}$.

C'est le plus petit sous-espace vectoriel de W , puisque tous les sous-espaces vectoriels de W contiennent 0_V .

Exemples

1. L'ensemble $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .

En effet, le vecteur $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ est dans W et comme les éléments de W sont de la forme $\begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix}$,

avec $x \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -(x_1 + x_2) \end{bmatrix} \in W,$$

$$\lambda \begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ -\lambda x \end{bmatrix} \in W.$$

$W \subset \mathbb{R}^2$ est la droite de pente -1 qui passe par l'origine.

2. L'ensemble $U = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x + y = 2 \right\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 . En effet,

il suffit de constater que $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin U$.

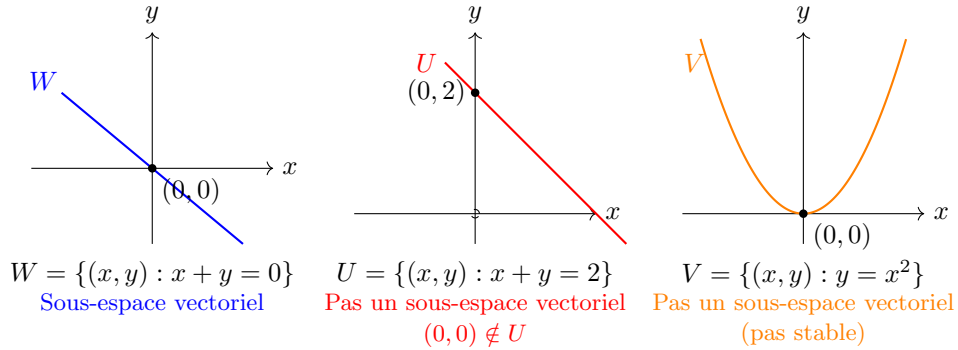
$U \subset \mathbb{R}^2$ est la droite de pente -1 qui passe par $(0, 2)$.

3. L'ensemble $V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 \right\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 même si

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in V$. En effet, les éléments de V sont de la forme $\begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix}$, avec $x \in \mathbb{R}$, et

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ (x_1 + x_2)^2 \end{bmatrix} \quad \text{en général, et}$$

$$\lambda \begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda x^2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \lambda x \\ (\lambda x)^2 \end{bmatrix} \quad \text{en général.}$$



$$4. W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0, a, b, c \neq 0 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

W est un plan de \mathbb{R}^3 . On montre que W est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

(a) $\vec{0} \in W : \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in W$ car $a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 = 0$

(b) $\vec{u} + \vec{v} \in W$, pour $\vec{u}, \vec{v} \in W$.

En effet, soit $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in W$, alors

$$au_1 + bu_2 + cu_3 = 0 \quad \text{et} \quad av_1 + bv_2 + cv_3 = 0.$$

On a donc $\vec{u} + \vec{v} \in W$ car :

$$\begin{aligned} a(u_1 + v_1) + b(u_2 + v_2) + c(u_3 + v_3) &= au_1 + av_1 + bu_2 + bv_2 + cu_3 + cv_3 \\ &= \underbrace{au_1 + bu_2 + cu_3}_{=0} + \underbrace{av_1 + bv_2 + cv_3}_{=0} \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

(c) Si $\vec{u} \in W$, $\lambda \vec{u} \in W$. On fait le même raisonnement qu'en 2.

$$5. W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 1, a, b, c \neq 0 \right\} \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3.$$

En effet, on a $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin W$ car $a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 = 0 \neq 1$.

6. L'ensemble $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions continues est un sous-espace vectoriel de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car la fonction nulle est continue, la somme de deux fonctions continues est continue et le produit d'une fonction continue par un scalaire reste continue.
7. L'ensemble \mathbb{P}_n est un sous-espace vectoriel de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour tout $n = 0, 1, 2, \dots$
8. L'ensemble \mathbb{P}_k est un sous-espace vectoriel de \mathbb{P}_n pour tout $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Remarque importante 4.12

Soit $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$, alors $\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

En effet :

1. $\vec{0} = 0\vec{v}_1 + \dots + 0\vec{v}_m \in \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$.
2. Soit $\vec{v}, \vec{w} \in \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$, alors $\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \dots + \lambda_m\vec{v}_m$ et $\vec{w} = \mu_1\vec{v}_1 + \dots + \mu_m\vec{v}_m$,
donc $\vec{v} + \vec{w} = (\lambda_1 + \mu_1)\vec{v}_1 + \dots + (\lambda_m + \mu_m)\vec{v}_m \in \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$.
3. $\lambda\vec{v} = \lambda\vec{v}_1 + \dots + \lambda\vec{v}_m \in \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$.

La notion d'espace engendré se généralise aux espaces vectoriels quelconques.

Sous-espace vectoriel engendré par un ensemble de vecteurs

Définition 4.13

Sous-espace vectoriel engendré

Soit V un espace vectoriel. Soit $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$.

L'ensemble formé de toutes les combinaisons linéaires de v_1, v_2, \dots, v_n est un sous-espace vectoriel de V appelé *sous-espace vectoriel engendré par v_1, v_2, \dots, v_n* , noté $\text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$. On dit que $\{v_1, \dots, v_n\}$ est un *système générateur* (ou une *famille génératrice*) de $\text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$.

Cette définition est en réalité une définition-théorème, puisqu'elle contient l'affirmation :

L'ensemble formé de toutes les combinaisons linéaires de v_1, v_2, \dots, v_n est un sous-espace vectoriel de V .

Vérifions-la dans le cas $n = 2$, la démonstration dans le cas général est similaire.

Soit V un espace vectoriel, $v_1, v_2 \in V$ et

$$W = \{v \in V \mid v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Alors,

1. $0_V \in V$ est dans W car $0_V = 0v_1 + 0v_2$.
2. Soit $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ et $w = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2$ deux éléments de W . Nous avons :
 $v + w = (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) + (\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2) = (\lambda_1 + \mu_1) v_1 + (\lambda_2 + \mu_2) v_2 \in W$.

$$3. \lambda v = \lambda(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = (\lambda\lambda_1) v_1 + (\lambda\lambda_2) v_2 \in W.$$

Remarques 4.4.0.14. Si w est une combinaison linéaire de u et v , alors $\text{Vect}(u, v, w) = \text{Vect}(u, v)$.

Exemples. 1. Soit $V = \mathbb{P}_2$. Considérons les polynômes

$$p_1(x) = 1, \quad p_2(x) = x, \quad p_3(x) = x^2, \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}.$$

Les éléments de $\text{Vect}(p_1, p_2)$ sont de la forme

$$\lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) = \lambda_1 + \lambda_2 x, \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Ainsi,

$$\text{Vect}(p_1, p_2) = \mathbb{P}_1.$$

Par conséquent, l'ensemble $\{p_1, p_2\}$ est un système générateur de \mathbb{P}_1 .

D'autre part, comme

$$\lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_3 p_3(x) = \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2, \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R},$$

nous avons

$$\text{Vect}(p_1, p_2, p_3) = \mathbb{P}_2.$$

Par conséquent, l'ensemble $\{p_1, p_2, p_3\}$ est un système générateur de \mathbb{P}_2 .

2. Soit $V = \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$. Considérons les matrices

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Les éléments de $\text{Vect}(A_1, A_2)$ sont de la forme

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Ainsi,

$$\text{Vect}(A_1, A_2) = \left\{ M \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}) \mid M = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Cet ensemble représente toutes les matrices 3×2 dont seule la première ligne est non nulle.

D'autre part, comme

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R},$$

nous avons

$$\text{Vect}(A_1, A_2, A_3, A_4) = \left\{ M \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}) \mid M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Par conséquent, l'ensemble $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ est un système générateur du sous-espace des matrices 3×2 dont la troisième ligne est nulle.

4.1.3 Indépendance linéaire

Définition 4.15

Indépendance linéaire

Soit V un espace vectoriel. Soit v_1, v_2, \dots, v_n des vecteurs de V .

Les vecteurs v_1, v_2, \dots, v_n sont *linéairement indépendants* (ou *libres*) si la seule solution de l'équation

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n = 0_V$$

est la solution nulle (ou triviale) :

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \dots, \quad x_n = 0.$$

Si par contre, il existe des coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que

$$\lambda_1v_1 + \lambda_2v_2 + \dots + \lambda_nv_n = 0_V \quad (\star)$$

on dit que les vecteurs sont *linéairement dépendants* (ou *liés*) et dans ce cas, (\star) est appelée une *relation de dépendance linéaire*.

Remarques 4.4.0.16. *Tout ensemble de vecteurs qui contient le vecteur 0_V est linéairement dépendant car*

$$1 \cdot 0_V + 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n = 0_V \quad \text{et} \quad (1, 0, 0, \dots, 0) \neq (0, 0, 0, \dots, 0).$$

Exemples

1. Soit $V = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices 2×2 à coefficients réels.

Les matrices

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sont linéairement indépendantes. En effet, si

$$\lambda_1A_1 + \lambda_2A_2 + \lambda_3A_3 + \lambda_4A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

on obtient

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{donc,} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

Ainsi, la seule combinaison linéaire nulle est la combinaison triviale.

Par contre, les matrices

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sont linéairement dépendantes, car

$$1B_1 + 1B_2 + (-1)B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On a donc une relation de dépendance linéaire entre ces trois matrices.

2. Soit $V = \mathbb{P}_2$. Les polynômes

$$p_1(x) = 1, \quad p_2(x) = x, \quad p_3(x) = x^2, \quad \text{avec } x \in \mathbb{R},$$

sont linéairement indépendants. En effet,

$$\begin{aligned} \lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_3 p_3(x) = 0 &\iff \lambda_1 1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Par contre, les polynômes

$$q_1(x) = x^2 - 2x, \quad q_2(x) = x^2 + 3, \quad q_3(x) = 2x + 3$$

sont linéairement dépendants car

$$1q_1(x) + (-1)q_2(x) + 1q_3(x) = 0.$$

3. Soit $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Les fonctions

$$f_1(x) = \cos(x) \quad \text{et} \quad f_2(x) = \sin(x)$$

sont linéairement indépendantes. En effet, si

$$\lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},$$

nous avons en particulier, en prenant $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{cases} \lambda_1 \cos(0) + \lambda_2 \sin(0) = 0 \\ \lambda_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \lambda_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Par contre, les fonctions

$$g_1(x) = \cos^2(x), \quad g_2(x) = \sin^2(x) \quad \text{et} \quad g_3(x) = \cos(2x)$$

sont linéairement dépendantes car $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$, donc

$$1g_1(x) + (-1)g_2(x) + (-1)g_3(x) = 0, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

4. Soit $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. La formule

$$\cos(3x) = 4 \cos^3(x) - 3 \cos(x)$$

indique que les fonctions

$$f_1(x) = \cos(x), \quad f_2(x) = \cos(3x) \quad \text{et} \quad f_3(x) = \cos^3(x)$$

sont linéairement dépendantes, car

$$3f_1(x) + 1f_2(x) + (-4)f_3(x) = 0, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Alternativement, cela peut être montré en résolvant

$$\lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \cos(3x) + \lambda_3 \cos^3(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

En prenant $x = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$ et $x = \frac{\pi}{3}$ nous obtenons le système homogène

$$\begin{cases} \lambda_1 \cos(0) + \lambda_2 \cos(0) + \lambda_3 \cos^3(0) = 0 \\ \lambda_1 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \lambda_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \lambda_3 \cos^3\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \\ \lambda_1 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \lambda_2 \cos(\pi) + \lambda_3 \cos^3\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_1 + 3\lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_1 - 8\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Comme la solution de ce système est

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \text{avec } t \in \mathbb{R},$$

nous retrouvons la relation de dépendance linéaire

$$3f_1(x) + 1f_2(x) + (-4)f_3(x) = 0, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Théorème 4.17

Caractérisation des ensembles linéairement dépendants

Soit V un espace vectoriel, et $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ (avec $k \geq 2$).

L'ensemble $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ est linéairement dépendant si et seulement si au moins un des vecteurs de S peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.

Démonstration. Analogue au cas $V = \mathbb{R}^n$ traité au chapitre 1. □

Corollaire 4.18

Si l'ensemble de vecteurs $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ est linéairement dépendant alors l'ensemble $\{v_1, v_2, \dots, v_k, v\}$ est aussi linéairement dépendant et ceci pour n'importe quel choix de $v \in V$.

Démonstration. Supposons que $v_1 \in \text{Vect}(v_2, \dots, v_k)$. Alors nous avons $v_1 \in \text{Vect}(v_2, \dots, v_k, v)$ pour tout $v \in V$ car

$$v_1 = \mu_2 v_2 + \dots + \mu_k v_k \Rightarrow v_1 = \mu_2 v_2 + \dots + \mu_k v_k + 0v$$

□

Corollaire 4.19

Si $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ est un ensemble de vecteurs linéairement indépendants alors tout sous-ensemble T de S est formé de vecteurs linéairement indépendants.

Démonstration. Supposons qu'un sous-ensemble T de S est formé de vecteurs linéairement dépendants. Le corollaire précédent entraîne que l'ensemble S est aussi formé de vecteurs linéairement dépendants, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. \square

4.2 Bases et dimension**Définition 4.20***Base d'un espace vectoriel*

Soit V un espace vectoriel. Soit b_1, b_2, \dots, b_n des vecteurs de V .

L'ensemble de vecteurs $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ est une *base de V* si et seulement si

1. l'ensemble $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ est linéairement indépendant,
2. l'ensemble $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ est un système générateur de V :

$$V = \text{Vect}(B) = \text{Vect}(b_1, b_2, \dots, b_n).$$

On note alors $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ et cette notation tient compte de l'ordre des vecteurs.

Remarques 4.4.0.21. Cette définition ne présuppose pas que tous les espaces vectoriels ont une base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$. Nous reviendrons sur ce point lors de la définition 4.25, qui distingue les espaces de dimension finie de ceux de dimension infinie.

Exemples. 1. Soit $V = \mathbb{R}^n$. Les vecteurs

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sont linéairement indépendants et engendrent $V = \mathbb{R}^n$. Par conséquent, ils forment une base de \mathbb{R}^n , appelée *base canonique*, notée \mathcal{E} :

$$\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n).$$

2. Soit $A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}$ une matrice carrée de taille $n \times n$.

En vertu du théorème de caractérisation des matrices inversibles, nous avons :

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}^n \iff A \text{ est inversible.}$$

3. Soit $V = \mathbb{P}_2$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Nous avons vu que les polynômes

$$p_1(x) = 1, \quad p_2(x) = x \quad \text{et} \quad p_3(x) = x^2, \quad \text{avec } x \in \mathbb{R},$$

sont linéairement indépendants. De plus, comme tout élément de \mathbb{P}_2 s'écrit

$$p(x) = a + bx + cx^2 = a p_1(x) + b p_2(x) + c p_3(x), \quad \text{avec } a, b, c \in \mathbb{R},$$

les polynômes p_1 , p_2 et p_3 forment un système générateur de \mathbb{P}_2 , donc une base de \mathbb{P}_2 , appelée *base canonique*.

Notation. Nous allons noter cette base $\mathcal{E} = (1, x, x^2)$ plutôt que $\mathcal{E} = (p_1, p_2, p_3)$.

4. Soit $V = \mathbb{P}_n$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n . Comme les polynômes

$$p_1(x) = 1, \quad p_2(x) = x, \quad p_3(x) = x^2, \quad \dots, \quad p_n(x) = x^{n-1}, \quad p_{n+1}(x) = x^n, \quad \text{avec } x \in \mathbb{R},$$

sont linéairement indépendants et tout polynôme s'écrit

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n, \quad \text{avec } a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R},$$

l'ensemble $\mathcal{E} = (1, x, x^2, \dots, x^n)$ est une base de \mathbb{P}_n , appelée *base canonique*.

5. Soit $V = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de taille 2×2 . Comme les matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sont linéairement indépendantes et toute matrice de taille 2×2 peut s'écrire sous la forme

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{avec } a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

l'ensemble

$$\mathcal{E} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

est une base de $V = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, appelée *base canonique*.

6. De même, l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ des matrices de taille $m \times n$ admet comme base canonique l'ensemble des matrices $(E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ où E_{ij} désigne la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en position (i, j) qui vaut 1.
7. Soit $V = \mathbb{P}_4$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 4. Considérons les trois polynômes

$$p_1(x) = x^2 + 2x - 1, \quad p_2(x) = 2x^2 - x + 3, \quad p_3(x) = 5x^2 + 3x + 5, \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}.$$

et soit $W = \text{Vect}(p_1, p_2, p_3)$.

Comme $p_3(x) = 2p_1(x) + p_2(x)$, ces polynômes sont linéairement dépendants. Donc $\{p_1, p_2, p_3\}$ ne constitue pas une base de W .

Par contre, les polynômes p_1 et p_2 sont linéairement indépendants et $\text{Vect}(p_1, p_2, p_3) = \text{Vect}(p_1, p_2)$, donc $\mathcal{B} = \{p_1, p_2\}$ forme une base de W .

8. Soit $V = \mathbb{P}_3$. Posons

$$q_1(x) = 1, \quad q_2(x) = x + 1, \quad q_3(x) = x^2 + x, \quad q_4(x) = x^3 + x^2.$$

Montrons que $\mathcal{B} = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ est une base de V .

Indépendance linéaire. Supposons

$$a q_1(x) + b q_2(x) + c q_3(x) + d q_4(x) = 0.$$

En développant et en regroupant par puissances de x :

$$(a + b) + (b + c)x + (c + d)x^2 + dx^3 = 0.$$

Par identification des coefficients, on obtient le système :

$$\begin{cases} d = 0, \\ c + d = 0, \\ b + c = 0, \\ a + b = 0, \end{cases} \Rightarrow a = b = c = d = 0.$$

Ainsi, les polynômes q_1, q_2, q_3, q_4 sont linéairement indépendants.

Génération. Soit $p(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \in \mathbb{P}_3$. Cherchons $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que

$$p(x) = a q_1(x) + b q_2(x) + c q_3(x) + d q_4(x).$$

Comme plus haut, l'égalité des coefficients impose :

$$\begin{cases} d = D, \\ c + d = C, \\ b + c = B, \\ a + b = A, \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} d = D, \\ c = C - D, \\ b = B - C + D, \\ a = A - B + C - D. \end{cases}$$

Il existe donc toujours des réels a, b, c, d réalisant $p(x)$.

Donc $\mathcal{B} = (1, x + 1, x^2 + x, x^3 + x^2)$ est une base de \mathbb{P}_3 .

Théorème 4.22

Théorème de la base extraite

Soit V un espace vectoriel. Soit $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ un ensemble de vecteurs de V et soit $W = \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_k)$ le sous-espace vectoriel de V engendré par S .

1. Si un vecteur de S est combinaison linéaire des autres, on peut le supprimer sans changer l'espace engendré : les autres vecteurs engendrent encore W .
2. Si $W \neq \{0_V\}$, alors il existe un sous-ensemble de S qui est une base de W . Autrement dit, il est possible d'extraire de l'ensemble S une base de W .

Démonstration. 1. Supposons que v_k s'écrit comme combinaison linéaire de v_1, v_2, \dots, v_{k-1} (si ce n'est pas le cas, il suffit de renuméroter les vecteurs) :

$$v_k = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_{k-1} v_{k-1}$$